Survival matematyczny

Zbiór zadań przygotowujących
do konkursów przedmiotowych

Autorzy:

Joanna Chabecka
Krzysztof Dolata
Bożena Topczewska
Emilia Turowska
Iwona Wierzchoń

Niniejsza publikacja powstała w ramach projektu
„Survival matematyczny” finansowanego z dotacji mFundacji.

Łochowo 2022

Spis treści:

Wstęp.. 4

Zadania logiczne 5

Wyrażenia algebraiczne i równania 11

Arytmetyka.. 19

Geometria analityczna.. 27

Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary
w potęgę umysłu ludzkiego,
jak matematyka.

Hugo Steinhaus

Wstęp

Survival matematyczny to przygoda, którą mieliśmy okazję przeżyć z naszymi uczniami.

Wszystko w ramach projektu realizowanego w naszej szkole dzięki wsparciu mFundacji.

Zajęcia matematyczne skierowane były dla uczniów klas 5-8.

Zmagaliśmy się z trudnościami i przełamywaliśmy ograniczenia.

Poniższa publikacja jest zbiorem zadań, które nam towarzyszyły podczas trwania projektu.

Mamy nadzieję, że przyczynią się one do rozwoju potęgi niejednego młodego umysłu.

Życzymy satysfakcji w rozwiązywaniu zadań.

Nauczyciele matematyki Szkoły Podstawowej
im. Jana Pawła II w Łochowie

Zadania logiczne

Zadanie 1.

Marta ma dwa wiaderka: jedno o pojemności 5 litrów, a drugie o pojemności 3 litrów. W jaki sposób można za pomocą tych wiaderek wlać do miski 4 litry wody?

Rozwiązanie:

Aby wlać do miski 4 litry wody Marta powinna wykonać poniższe kroki:

krok I: napełnić wodą wiaderko 5-litrowe,

krok II: przelać 3 litry wody do wiaderka 3-litrowego,

krok III: przelać resztę wody do miski – będą w niej 2 litry wody.

Po powtórzeniu tych czynności w misce będą 4 litry wody.

Zadanie 2.

Mamy do dyspozycji dwie klepsydry: 5-minutową i 7-minutową. Jak za ich pomocą odmierzyć 9 minut, a jak 13 minut?

Rozwiązanie:

Aby odmierzyć 9 minut należy obrócić obie klepsydry i rozpocząć odmierzanie czasu. Gdy przesypie się piasek w klepsydrze 5-minutowej odwrócić ją, a gdy przesypie się piasek w klepsydrze 7-minutowej odwrócić 5-minutową. Odmierzanie czasu zakończy się, gdy przesypie się piasek w klepsydrze 5-minutowej.

Aby odmierzyć 13 minut należy podobnie jak ostatnio odwrócić obie klepsydry. Gdy przesypie się piasek w klepsydrze 5-minutowej, odwrócić ją, a gdy przesypie się piasek w 7-minutowej odwrócić tę 7-minutową. Następnie, gdy przesypie się piasek w klepsydrze 5-minutowej odwrócić 7-minutową. Odmierzanie czasu zakończy się, gdy przesypie się piasek w klepsydrze 7-minutowej.

Zadanie 3.

Na półce stoją trzy świece, z których jedna spala się w ciągu 4 minut, druga w ciągu 5 minut, a trzecia w ciągu 9 minut. Jak za ich pomocą odmierzyć 6 minut?

Rozwiązanie:

Zapalmy najpierw wszystkie świece. Gdy dopali się świeca 4-minutowa zgaśmy wszystkie pozostałe. Otrzymamy wtedy święcę 1-minutową i 5-minutową, którymi po kolei odmierzamy 6 minut.

Zadanie 4.

Ewa ma trzy puste pojemniki: dwie skrzyneczki i wiaderko. Chce w nich rozmieścić 10 orzechów, tak aby żaden nie był pusty i w każdym z nich były:

a) nieparzyste i różne liczby orzechów,
b) parzyste i różne liczby orzechów.

W jaki sposób Ewa powinna to zrobić?

Rozwiązanie:

a) Zauważmy, że suma trzech liczb nieparzystych nie będzie nigdy wynosiła 10. Ewa może jednak rozmieścić orzechy tak aby spełnione były warunki zadania. Przykładowo do jednej skrzyneczki może włożyć 7 orzechów, a w drugiej umieścić wiaderko z 1 orzechem oraz 2 orzechy poza wiaderkiem.
b) Przykładowo Ewa do jednej skrzyneczki może włożyć 6 orzechów, a w drugiej umieścić wiaderko z 2 orzechami oraz 2 orzechy poza wiaderkiem.

Zadanie 5.

Żołnierz ma dwa lonty. Są one różnej długości i grubości. Wiadomo tylko, że każdy z nich spala się w ciągu jednej godziny. W jaki sposób można odmierzyć dokładnie 45 minut?

Rozwiązanie:

Żołnierz powinien podpalić oba lonty: jeden z dwóch stron, a drugi z jednej strony. Spalenie całego pierwszego lontu będzie trwało pół godziny. Wówczas trzeba podpalić drugi lont także z drugiej strony. Dopalenie się drugiego lontu zajmie jeszcze 15 minut.

Zadanie 6.

Takim samym literom odpowiadają takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry. Jakie cyfry odpowiadają literom K, N i E?

```
A+K=A          CN+N=MK            MB
                                + CD
                                ----
                                 EDM
```

Rozwiązanie:

Z pierwszego równania wnioskujemy, że K = 0. Jeśli K = 0, to z drugiego równania wnioskujemy, że liczba MK ma na końcu 0, zatem N musi się równań 5. Stąd cyfra M jest zawsze o 1 większa od C. Bez względu na cyfry B i D cyfra E może wynosić tylko 1.

Zadanie 7.

Takim samym literom odpowiadają takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry. Rozszyfruj działania:

a)
```
  AA
 +AA
 ---
 BBC
```

b)
```
  DD
 +EE
 ---
 DDF
```

c)
```
  GH
 +HG
 ---
 KGK
```

Rozwiązanie:

a) Aby suma takich samych liczb dwucyfrowych o tych samych cyfrach dała liczbę trzycyfrową z takimi samymi cyframi setek i dziesiątek jest tylko jedna możliwość przy działaniu 55 + 55. Stąd $A = 5, B = 1, C = 0$.

b) W wyniku dodawania liczb dwucyfrowych postaci $DD + EE$ mamy możliwość otrzymania liczby trzycyfrowej o takiej samej cyfrze setek i dziesiątek tylko w przypadku $11 + 99 = 110$. A zatem $D = 1, E = 9, F = 0$.

c) Dodając do siebie liczby dwucyfrowe powstałe przez przestawienie cyfr i takie, że ich suma jest liczbą trzycyfrową z cyfrą dziesiątek taką, że występuje ona w obu składnikach mamy tylko możliwość przy działaniu $29 + 92 = 121$. A zatem $G = 2, H = 9, K = 1$.

Zadanie 8.

Takim samym literom odpowiadają takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry. Rozszyfruj działanie:

```
  ABC
  ABC
 +ABC
 ----
  CCC
```

Rozwiązanie:

Jeśli dodajemy do siebie trzy takie same liczby trzycyfrowe, to tak jakbyśmy chcieli wykonać mnożenie liczby przez 3. Tylko cyfra 5 pomnożona przez 3 daje cyfrę jedności także 5. Stąd wynika, że musimy liczbę 555 otrzymać z trzech takich samych liczb z cyfrą jedności 5. Może to być jedynie działanie $3 \cdot 185$. Zatem $A = 1, B = 8, C = 5$.

Zadanie 9.

Takim samym literom odpowiadają takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry. Rozszyfruj działania:

a)
```
   WKRĘTY
·       3
---------
   KRĘTY2
```

b)
```
   MASTER
·       3
---------
   ASTER8
```

Rozwiązanie:

a) Przy mnożeniu przez 3 aby uzyskać cyfrę jedności równą 2 musimy za Y wstawić 4. Następnie wstawiamy ją też za cyfrę dziesiątek iloczynu. Wynika z tego, że T może być tylko równe 1. Podstawiamy za $T=1$ w iloczynie i znowu widzimy, że $Ę$ może być tylko równe 7. Podstawiamy liczbę 7 do iloczynu i tak dalej. W rezultacie otrzymujemy, że $Ę=7, K=8, R=5, T=1, W=2, Y=4$.

b) Przy mnożeniu przez 3 możemy uzyskać cyfrę jedności iloczynu tylko wtedy, gdy za R podstawimy 6. Zastępujemy teraz literkę R z iloczynu cyfrą 6. Wynika z tego, że literką E może być tylko 5. Podstawiamy za tę literkę w iloczynie 5 i dalej postępujemy podobnie. W rezultacie otrzymujemy, że $A=4, E=5, M=1, R=6, S=2, T=8$.

Zadanie 10.

Takim samym literom odpowiadają takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry. Rozszyfruj działanie:

```
  DURSZLAK
·        9
----------
 KKKKKKKKK
```

Rozwiązanie:

Należy się najpierw zastanowić i rozwiązać zadanie pomocnicze $9 \cdot Y = YB$. Wynika z tego, że $B=5$, czyli w naszym przypadku $K=5$. Znamy już wynik mnożenia. Teraz możemy dopasowywać pozostałe literki. Zatem: $A=9, D=6, K=5, L=3, R=7, S=2, U=1, Z=8$.

Zadanie 11.

Z prawej strony pewnej liczby dwucyfrowej dopisano pewną cyfrę. Utworzono w ten sposób liczbę trzycyfrową, większa od poprzedniej o 500. Jaka była ta dwucyfrowa liczba? Jaką cyfrę dopisano?

Rozwiązanie:

Zapisz zadanie w postaci

```
   AB
+ 500
  ABC
```

Różne litery nie muszą oznaczać różnych cyfr, a 0 oznacza zero. Zauważmy, że $A=B=C$. A zatem szukaną liczbą dwucyfrową jest 55 oraz dopisano cyfrę 5.

Zadanie 12.

W pewnej liczbie trzycyfrowej zamieniono cyfrę dziesiątek z cyfrą jedności. Utworzono w ten sposób nowa liczbę trzycyfrową. Suma obu liczb jest równa 1187. Wyznacz te liczby.

Rozwiązanie:

Zapiszmy treść zadania w postaci

```
  ABC
+ ACB
 1187
```

Pamiętajmy, że identycznym literom odpowiadają identyczne cyfry, natomiast różnym literom mogą odpowiadać takie same cyfry. Porównujemy drugą i trzecią kolumnę i wnioskujemy, że $B+C=17$. Teraz zauważmy, że $A+A=10$, czyli $A=5$. Ponieważ nie mamy innych warunków, zatem $B=9$ i $C=8$ lub odwrotnie $B=8$ i $C=9$. Szukanymi liczbami są więc 589 i 598.

Zadanie 13.

W pewnej liczbie trzycyfrowej zamieniono cyfrę setek z cyfrą jedności. Utworzono w ten sposób nową liczbę trzycyfrową. Różnica obu tych liczb jest liczba dwucyfrową. Oblicz tę różnicę.

Rozwiązanie:

Zapiszmy treść zadania w postaci

```
  ABC
- CBA
   EF
```

Gdyby literom *A* i *C* odpowiadały takie same cyfry, to różnica *EF* byłaby równa 0. Wobec tego *A* jest różne od *C*. Aby liczba setek różnicy była równa zero, musi być spełniony warunek $A=C+1$. Stąd wynika, że $F=9$. Wobec tego także $E=9$. Szukaną różnicą jest zatem 99.

Zadanie 14.

Między cyfry liczby dwucyfrowej x wpisano pewna cyfrę. Otrzymana w ten sposób liczba trzycyfrowa jest 10 razy większa od liczby x.

a) Jaka jest cyfra jedności liczby x?

b) Jaka cyfrę wpisano?

c) Podaj przykład takiej liczby x.

Rozwiązanie:

Niech dopisaną cyfrą będzie C i niech liczba x ma cyfry A, B. Zadanie ma zatem postać: $ACB = AB0$, gdzie 0 oznacza zero. Zauważmy, że $A=1$ i $C=2$. Możemy zatem udzielić odpowiedzi na kolejne pytania.

a) Cyfrą jedności liczby x jest 0.
b) Wpisaną cyfrą jest 0.
c) Liczby x są postaci $10, 20, 30, \ldots, 90$.

Zadanie 15.

Miedzy cyfry liczby dwucyfrowej y wpisano pewną cyfrę. Otrzymana w ten sposób liczba trzycyfrowa jest o 110 większa od liczby y.

a) Jaka jest cyfra dziesiątek liczby y?
b) Jaka cyfrę wpisano?
c) Jaka jest cyfra jedności liczby y?
d) Podaj przykład takiej liczby y.

Rozwiązanie:

Niech dopisaną cyfrą będzie C i niech liczba y ma cyfry A, B. Zadanie ma więc postać: $AB+110 = ACB$. Zauważmy, że $A=1$ i $C=2$. Możemy zatem udzielić odpowiedzi na kolejne pytania.

a) Cyfrą dziesiątek liczby y jest 1.
b) Wpisaną cyfrą jest 2.
c) Cyfrą jedności liczby y może być dowolna liczba.
d) Liczby y są postaci $10, 11, 12, \ldots, 19$.

Wyrażenia algebraiczne i równania

Zadanie 1.

Sprzedawczyni wydała Wojtkowi 5 zł reszty w monetach po 20 groszy i po 50 groszy. W sumie dostał on 16 monet. Ile wśród nich było dwudziestogroszówek?

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

x – liczba monet 20-groszowych
$16-x$ – liczba monet 50-groszowych

$$
\begin{aligned}
0,2x+0,5(16-x)&=5\\
0,2x+8-0,5x&=5\\
-0,3x&=-3 \quad /\cdot(-10)\\
3x&=30\\
x&=10
\end{aligned}
$$

Odp. Wojtek otrzymał 10 monet 20-groszowych.

Zadanie 2.

W dwóch naczyniach jest razem 6,8 l mleka. Ile litrów mleka jest w każdym naczyniu, jeśli w jednym jest o 2,2 l więcej niż w drugim?

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

x – ilość litrów mleka w I naczyniu
$x + 2,2$ – ilość litrów mleka w II naczyniu

$$
\begin{aligned}
x+x+2,2&=6,8\\
2x&=4,6\\
x&=2,3
\end{aligned}
$$

Odp. W pierwszym naczyniu jest 4,5 l, a w drugim 2,3 l mleka.

Zadanie 3.

Przed dwoma laty matka była 4 razy starsza od syna. Za 10 lat będą mieli razem 74 lata. Ile lat ma obecnie każde z nich?

Rozwiązanie:

	przed dwoma laty	teraz	za 10 lat
matka	$4x$	$4x+2$	$4x+12$
syn	x	$x+2$	$x+12$

$$4x+12+x+12=74$$
$$5x+24=74$$
$$5x=50$$
$$x=10$$

$$4\cdot 10+2=42$$
$$10+2=12$$

Odp. Mama ma obecnie 42 lata, a jej syn 12.

Zadanie 4.

Trzech biegaczy wzięło udział w sztafecie. Pierwszy przebiegł połowę dystansu, drugi jedną trzecią pozostałej części, a trzeci ostatnie 20 km. Oblicz długość trasy sztafety.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$x-$ długość sztafety

$\frac{1}{2}x-$ trasa, którą przebiegł pierwszy zawodnik

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}x-$ trasa, którą przebiegł drugi zawodnik

20 km $-$ trasa, którą przebiegł trzeci zawodnik

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x+20=x$$
$$\frac{4}{6}x+20=x$$
$$20=\frac{1}{3}x$$
$$60=x$$

Odp. Sztafeta ma długość 60 km.

Zadanie 5.

Pewna liczba *a* przy dzieleniu przez 14 daje resztę 2. Inna liczba *b* przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3. Jaką resztę z dzielenia przez 7 da liczba $3a+4b$?

Rozwiązanie:

$a:14=x$ reszta 2

$b:7=y$ reszta 3

Zatem:

$$a=14x+2$$
$$b=7y+3$$

Znajdźmy teraz resztę z dzielenia przez 7 liczby $3a+4b$:

$$\begin{aligned} 3a+4b= {} & 3(14x+2)+4(7y+3) \\ & 42x+6+28y+12= \\ & 42x+28y+18= \\ & 7(6x+4y+2)+4 \end{aligned}$$

Odp. Reszta z dzielenia $3a+4b$ przez 7 to 4.

Zadanie 6.

Basia w pewną sobotę spędziła przy komputerze 1,2 godziny, co stanowiło 0,125 dnia. Słońce tego dnia wzeszło o godzinie 7:03. O której godzinie był zachód słońca?

Rozwiązanie:

1,2 godziny $=1,2\cdot 60$ minut $=72$ minuty.

Oznaczmy przez *x* długość dnia.

$$0,125x=1,2 \quad /\cdot 8$$
$$x=9,6$$

Dzień trwał 9,6 godziny, czyli 9 godz. 36 min.

$$7:03 \xrightarrow{+9h\,36\,\mathrm{min}} 16:39$$

Odp. Zachód Słońca tego dnia był o 16:39.

Zadanie 7.

Suma czterech liczb jest równa 19. Druga liczba jest 3 razy większa od pierwszej. Trzecia liczba jest o 5 większa od sumy dwóch pierwszych liczb. Czwarta liczba jest średnią arytmetyczną drugiej i trzeciej liczby. Wyznacz te liczby.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$x - \text{ pierwsza liczba}$$
$$3x - \text{ druga liczba}$$
$$4x+5 - \text{ trzecia liczba}$$
$$\frac{3x+4x+5}{2}=\frac{7x+5}{2} - \text{ czwarta liczba}$$

$$x+3x+4x+5+\frac{1}{2}(7x+5)=19$$
$$8x+5+\frac{1}{2}(7x+5)=19 \quad /\cdot 2$$
$$16x+10+7x+5=38$$
$$23x=23$$
$$x=1$$

Odp. Szukane liczby to 1, 3, 9 i 6.

Zadanie 8.

Różnica cyfry dziesiątek i cyfry jedności pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 4. Gdy do tej szukanej liczby dodamy liczbę utworzoną z jej cyfr, ale zapisanych w odwrotnej kolejności, to otrzymamy 132. Wyznacz tę liczbę.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$b - \text{ cyfra jedności}$$
$$b+4 - \text{ cyfra dziesiątek}$$
$$10(b+4)+b - \text{ szukana liczba}$$
$$10b+b+4 - \text{ liczba utworzona z cyfr w odwrotnej kolejności}$$

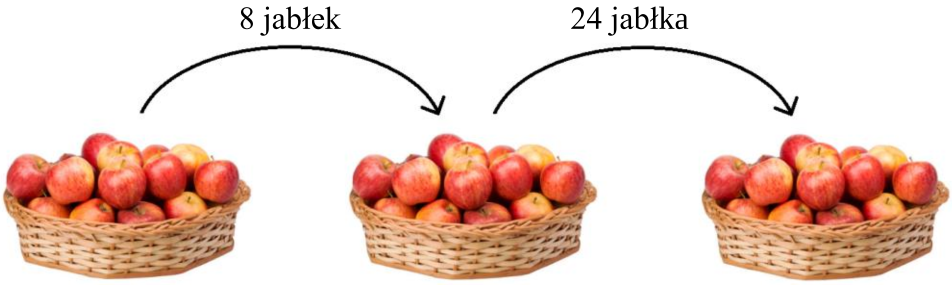
$$10(b+4)+b+10b+b+4=132$$
$$22b+44=132$$
$$22b=88$$
$$b=4$$

Odp. Szukana liczba to 48.

Zadanie 9.

W trzech koszach było razem 120 jabłek. Jeżeli z pierwszego kosza przełożymy do drugiego 8 jabłek, a następnie z drugiego do trzeciego przełożymy 24 jabłka, to liczba jabłek we wszystkich koszach będzie jednakowa. Ile jabłek było w każdym koszu?

Rozwiązanie:



$$\underbrace{40+8=48 \qquad 40+24-8=56 \qquad 40-24=16}_{120 \text{ jabłek}}$$

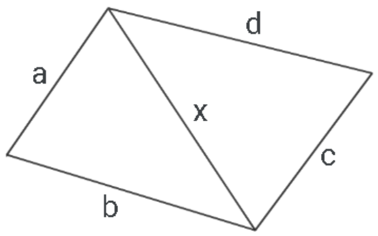
$120:3=40$

Odp. W pierwszym koszyku było 48 jabłek, a drugim 56, a w trzecim 16 jabłek.

Zadanie 10.

Przekątna czworokąta dzieli go na dwa trójkąty, których obwody wynoszą odpowiednio 25 cm i 27 cm. Oblicz długość tej przekątnej, wiedząc, że obwód czworokąta jest równy 32 cm.

Rozwiązanie:



$$\begin{aligned} a+b+x&=25 \\ c+d+x&=27 \\ a+b+c+d&=32 \end{aligned}$$

Mamy zatem:

$$\begin{aligned} a+b+x+c+d+x&=52 \\ a+b+c+d+2x&=52 \\ 32+2x&=52 \\ 2x&=20 \\ x&=10 \end{aligned}$$

Odp. Przekątna ma długość 10 cm.

Zadanie 11.

Cyfra setek pewnej liczby trzycyfrowej wynosi 2. Jeżeli tę cyfrę przeniesiemy na koniec, to otrzymamy liczbę o 25% mniejszą od początkowej. Ile wynosi początkowa liczba?

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$\overline{2xy} = 2\cdot 100 + 10x + y -$ liczba trzycyfrowa
$\overline{xy2} = 100x + 10y + 2 -$ liczba po przestawieniu cyfry 2 na koniec

$$100x + 10y + 2 = \frac{3}{4}(200 + 10x + y) \quad /\cdot 4$$
$$400x + 40y + 8 = 600 + 30x + 3y$$
$$370x + 37y = 592 \quad /:37$$
$$10x + y = 16$$

Zatem $x=1$ i $y=6$.

Odp. Początkowa liczba to 216.

Zadanie 12.

W wyścigu startowało 37 zawodników. Liczba zawodników, którzy dobiegli do mety przed Zbyszkiem była 5 razy mniejsza od liczby zawodników, którzy ukończyli bieg po nim. Które miejsce zajął w wyścigu Zbyszek?

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$x -$ liczba zawodników, którzy ukończyli bieg przed Zbyszkiem
$5x -$ liczba zawodników, którzy ukończyli bieg po Zbyszku

$$x + 1 + 5x = 37$$
$$6x + 1 = 37$$
$$6x = 36$$
$$x = 6$$

Odp. Zbyszek zajął 7 miejsce.

Zadanie 13.

W dwóch workach znajduje się łącznie 140 kg mąki. Jeżeli z pierwszego worka przesypiemy do drugiego 12,5% mąki znajdującej się w pierwszym worku, to w obydwu workach będą jednakowe ilości mąki. Ile kilogramów mąki było początkowo w każdym worku?

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$x -$ waga mąki w pierwszym worku
$140 - x -$ waga mąki w drugim worku

$$x-12,5\%x=140-x+12,5\%x$$
$$\frac{7}{8}x=140-\frac{7}{8}x$$
$$\frac{14}{8}x=140 \quad /:14$$
$$\frac{1}{8}x=10$$
$$x=80$$

Odp. W pierwszym worku było 80 kg mąki, a w drugim 60 kg.

Zadanie 14.

Wykaż, że:

a) kwadrat liczby nieparzystej zwiększony o 3 jest podzielny przez 4,
b) suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych, które nie dzielą się przez 3 jest liczbą nieparzystą,
c) kwadrat sumy trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych przy dzieleniu przez 36 daje resztę 9.

Rozwiązanie:

a) Oznaczmy przez n dowolną liczbę całkowitą. Wówczas wyrażenie $2n+1$ przedstawia liczbę nieparzystą.

$$(2n+1)^2+3=4n^2+4n+1+3=4n^2+4n+4=4(n^2+n+1)$$

Zatem kwadrat liczby nieparzystej zwiększony o 3 przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 4 i liczby całkowitej, co dowodzi podzielności przez 4.

b) Skoro liczby nie dzielą się przez 3, to przy dzieleniu przez 3 dają resztę odpowiednio 1 oraz 2. Dla dowolnej liczby całkowitej n wyrażenia $3n+1$ oraz $3n+2$ są kolejnymi liczbami całkowitymi, które nie dzielą się przez 3.

$$\begin{aligned}(3n+1)^2+(3n+2)^2 &= 9n^2+6n+1+9n^2+12n+4\\ &=18n^2+18n+5\\ &=2(9n^2+9n+2)+1\end{aligned}$$

Zatem sumę kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych, które nie dzielą się przez 3 przedstawiliśmy jako liczbę, która z dzielenia przez 2 daje resztę 1, czyli jako liczbę nieparzystą.

c) Oznaczmy przez $2n+1,\ 2n+3,\ 2n+5$ kolejne liczby całkowite nieparzyste dla dowolnej liczby całkowitej n. Wówczas:

$$(2n+1+2n+3+2n+5)^2=(6n+9)^2=36n^2+108n+81=36(n^2+3n+2)+9$$

Zatem kwadrat sumy trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych przedstawiliśmy jako wyrażenie, które z dzielenia przez 36 daje resztę 9.

Zadanie 15.

Piotruś i Krzyś postanowili pomóc babci w skopaniu ogródka na wiosnę. Gdyby kopał tylko Piotruś, to potrzebowałby na skopanie całego ogródka 6 godzin, a gdyby kopał tylko Krzyś, to potrzebowałby 10 godzin. W jakim czasie chłopcy skopią cały ogródek pracując razem?

Rozwiązanie:

Piotruś: 6 godzin cały ogródek
Krzyś: 10 godzin cały ogródek

Zauważmy, że Piotruś w jedną godzinę wykona $\frac{1}{6}$ swojej pracy. Tymczasem Krzyś w jedną godzinę wykona $\frac{1}{10}$ pracy. Gdy pracują razem w ciągu jednej godziny wykonają:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{5}{30}+\frac{3}{30}=\frac{8}{30} \text{ pracy.}$$

Niech x oznacza potrzebny czas w godzinach na wykonanie całej pracy przez dwóch chłopców.

$$\frac{8}{30}\cdot x=1$$

$$x=\frac{30}{8}$$

$$x=\frac{15}{4}$$

$$x=3\frac{3}{4}$$

Odp. Chłopcy potrzebują 3 godziny i 45 minut na skopanie całego ogródka.

Arytmetyka

Zadanie 1.

Ile wynosi wartość wyrażenia $\left(32^7+4^{18}+32^7\right):\left(4^{16}+2^{16}\cdot 2^{16}\right)$?

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\left(32^7+4^{18}+32^7\right):\left(4^{16}+2^{16}\cdot 2^{16}\right)= &\left(\left(2^5\right)^7+\left(2^2\right)^{18}+\left(2^5\right)^7\right):\left(\left(2^2\right)^{16}+2^{32}\right)=\\ &\left(2^{35}+2^{36}+2^{35}\right):\left(2^{32}+2^{32}\right)=\\ &\left(2\cdot 2^{35}+2^{36}\right):\left(2\cdot 2^{32}\right)=\\ &\left(2^{36}+2^{36}\right):2^{33}=2^{37}:2^{33}=2^4=16\end{aligned}$$

Odp. Wartość szukanego wyrażenia wynosi 16.

Zadanie 2.

Tomek ma 256 zł, a Kasia 71 zł. Ile złotych powinien Tomek dać Kasi, aby zostało mu dwa razy więcej niż miałaby wtedy Kasia?

Rozwiązanie:

I sposób:

$256+71=327$ zł

$327:3=109$ zł

$109\cdot 2=218$ zł

$256-218=38$ zł lub $109-71=38$ zł

II sposób:

$x-$ kwota w złotówkach, jaką powinna mieć Kasia

$2x-$ kwota w złotówkach, jaką powinien mieć Tomek

$$\begin{aligned}x+2x&=256+71\\ 3x&=327\\ x&=109\\ 2x&=218\end{aligned}$$

$256-218=38$ zł lub $109-71=38$ zł

Odp. Tomek powinien dać Kasi 38 zł, aby zostało mu dwa razy więcej niż miałaby wtedy Kasia.

Zadanie 3.

Na stole leżały cukierki. Janek wziął $\frac{1}{11}$ z nich, a Zosia tylko sześć cukierków. Razem mieli $\frac{1}{9}$ wszystkich cukierków. Ile cukierków zostało na stole?

Rozwiązanie:

I sposób:

Janek i Zosia mają razem $\frac{1}{9}$ wszystkich cukierków. Janek ma ich $\frac{1}{11}$, zatem Zosia ma $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}=\frac{2}{99}$ cukierków.

Z treści zadania wiemy, że Zosia ma tylko 6 cukierków, zatem: $\frac{2}{99}$ to 6 cukierków; $\frac{1}{99}$ to 3 cukierki; $\frac{99}{99}$ to 297 cukierków.

Wszystkich cukierków jest 297. Janek i Zosia wzięli $\frac{1}{9}\cdot 297=33$ cukierki, czyli zostało: $297-33=264$ cukierki.

II sposób:

Sprawdzamy kolejno następujące liczby cukierków:

Wszystkie cukierki	99	198	297
Zebrane cukierki	$\frac{1}{9}\cdot 99=11$	$\frac{1}{9}\cdot 198=22$	$\frac{1}{9}\cdot 297=33$
Cukierki Janka	$\frac{1}{11}\cdot 99=9$	$\frac{1}{11}\cdot 198=18$	$\frac{1}{11}\cdot 297=27$
Cukierki Zosi	$11-9=2$	$22-18=4$	$33-27=6$

Ponieważ Zosia wzięła tylko 6 cukierków, to wszystkich cukierków było 297. Dzieci wzięły 33 cukierki, zatem na stole zostały 264 cukierki.

Odp. Na stole zostały 264 cukierki.

Zadanie 4.

Suma dwóch liczb naturalnych wynosi 57. Przy dzieleniu większej liczby przez mniejszą otrzymujemy 6 i resztę 1. Znajdź te liczby.

Rozwiązanie:

Gdy większa liczba dzieli się przez mniejszą bez reszty, to suma wynosi $57-1=56$. Zatem:

$56:7=8$

$8\cdot 6+1=49$

Odp. Szukane liczby to 49 i 8.

Zadanie 5.

Znajdź największą liczbę pierwszą, przez którą dzieli się liczba 2097152.

$$
\begin{array}{r|l}
2\,097\,152 & 2 \\
1\,048\,576 & 2 \\
524\,288 & 2 \\
262\,144 & 2 \\
131\,072 & 2 \\
65\,536 & 2 \\
32\,768 & 2 \\
16\,384 & 2 \\
8\,192 & 2 \\
4\,096 & 2 \\
2\,048 & 2 \\
1\,024 & 2 \\
512 & 2 \\
256 & 2 \\
128 & 2 \\
64 & 2 \\
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
$$

Zatem $2\,097152=2^{21}$.

Odp. Ponieważ $2\,097152=2^{21}$, więc największą liczbą pierwszą przez którą dzieli się liczba 2097152 jest 2.

Zadanie 6.

Wiktoria odebrała świadectwo szkolne, na którym znajduje się 12 ocen. Dziewczynka ma na nim jedną szóstkę, a pozostałe oceny to piątki, czwórki i trójki. Piątek jest trzy razy więcej niż trójek i o trzy więcej niż czwórek. Ile piątek, czwórek i trójek znajduje się na świadectwie Wiktorii? Ile wynosi średnia ocen Wiktorii?

Rozwiązanie:

Liczba piątek na świadectwie Wiktorii jest podzielna przez 3, bo jest ich trzy razy więcej niż trójek. Nie jest ona równa 3, bo Wiktoria ma także czwórki, których jest o trzy mniej. Nie jest równa 9, bo wtedy Wiktoria miałaby sześć czwórek i razem więcej niż 15 ocen. Oczywiście nie jest też równa 12, a zatem zostaje tylko 6 piątek. Czwórek jest o 3 mniej czyli $6-3=3$, trójki są dwie, bo $6:3=2$. Jedna szóstka, sześć piątek, trzy czwórki i dwie trójki to razem 12 ocen.

Średnia arytmetyczna:

$$\frac{1\cdot 6+6\cdot 5+3\cdot 4+3\cdot 2}{12}=4,5$$

Odp. Na świadectwie Wiktorii znajduje się sześć piątek, trzy czwórki i dwie trójki. Średnia ocen Wiktorii jest równa 4,5.

Zadanie 7.

Numerując strony lektury, którą Karolina ma przeczytać, użyto 390 cyfr. Ile stron ma ta książka? Ile razy w numeracji stron użyto cyfry 6?

Rozwiązanie:

Suma cyfr użytych do zapisania liczb jednocyfrowych i dwucyfrowych wynosi $9\cdot 1+90\cdot 2=189$. Do zapisania liczb trzycyfrowych pozostaje $390-198=201$ cyfr, czyli można zapisać $201:3=67$ takich liczb.

Liczba stron w książce wynosi $99+67=166$ stron. Cyfra 6 w rzędzie jedności występuje 17 razy i w rzędzie dziesiątek również 17 razy, czyli łącznie 34 razy.

Odp. Książka ma 166 stron. Cyfra 6 została użyta 34 razy.

Zadanie 8.

Ile jest wszystkich takich liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, które przy dzieleniu przez 41 dają resztę równą 1?

Rozwiązanie:

Wszystkie możliwości można wypisać zaczynając od najmniejszej liczby trzycyfrowej, która przy dzieleniu przez 41 daje resztę 1, czyli od liczby 124. Następnie wystarczy dodawać kolejno 41, aż otrzymamy ostatnią taką liczbę trzycyfrową, czyli 985, kontrolując, czy otrzymana liczba spełnia warunki zadania (liczba trzycyfrowa o różnych cyfrach, bez cyfry 0).

Szukane liczby to: 124, 165, 247, 329, 452, 493, 534, 657, 698, 739, 821, 862, 985.

Odp. Takich liczb jest 13.

Zadanie 9.

Telewizor kosztował początkowo 3000 zł. Jego cena została podwyższona o 10%. Podczas promocji cenę obniżono o 20% i zaoferowano bonifikatę przy zakupie płatnym bezgotówkowo w postaci 5% ceny. Ile zapłaci klient kupując ten telewizor i płacąc bezgotówkowo?

Rozwiązanie:

I sposób:

3000 zł – początkowa cena telewizora

$10\% \cdot 3000 = 0{,}1 \cdot 3000 = 300$ zł – kwota, o którą podrożał telewizor

$3000 + 300 = 3300$ zł – cena telewizora po podwyżce

$20\% \cdot 3300 = 0{,}2 \cdot 3300 = 660$ zł – kwota, o którą obniżono cenę telewizora

$3300 - 660 = 2640$ zł – cena telewizora po obniżce

$5\% \cdot 2640 = 0{,}05 \cdot 2640 = 132$ zł – wysokość bonifikaty za transakcję bezgotówkową

$2640 - 132 = 2508$ zł – ostateczna cena, jaką zapłaci klient

II sposób:

$110\% \cdot 3000 = 1{,}1 \cdot 3000 = 3300$ zł – cena telewizora po podwyżce

$80\% \cdot 3300 = 0{,}8 \cdot 3300 = 2640$ zł – cena telewizora po obniżce

$95\% \cdot 2640 = 0{,}95 \cdot 2640 = 2508$ zł – ostateczna cena, jaką zapłaci klient

Odp. Klient, który kupi telewizor i dokona płatności bezgotówkowej zapłaci 2508 zł.

Zadanie 10.

Zegar został nakręcony i ustawiony na godzinę 6:00. Zegar chodził bez przerwy 1620 godzin i zatrzymał się. O której godzinie zatrzymał się ten zegar?

Rozwiązanie:

Liczbę godzin, jaką zegar chodził dzielimy przez 24 godziny (dobę):

$1620 : 24 = 67,5$

Ponieważ $67 \cdot 24 = 1608$, więc tę liczbę odejmujemy od 1620:

$1620 - 1608 = 12$

Zatem do 6:00 należy dodać 12 godzin:

$6 + 12 = 18$

Odp. Zegar zatrzymał się o godzinie 18:00.

Zadanie 11.

Kilogramowe opakowanie ciastek kosztowało 24 zł. Sprzedawca przygotował dwie wersje promocji tych ciastek:

Promocja I:	Promocja II:
Za tę samą cenę otrzymasz o 20% ciastek więcej.	Za tyle samo ciastek zapłacisz o 20% mniej.

Która z promocji jest korzystniejsza dla klienta? Uzasadnij, wykonując obliczenia.

Rozwiązanie:

I sposób:

W pierwszej promocji klient otrzyma 120% opakowania w cenie 24 zł, a zatem 1,2 kilograma ciastek w cenie 24 zł.

$24 : 1,2 = 20$ zł, więc 1 kg ciastek kosztuje 20 zł.

W drugiej promocji 1 kg ciastek kosztuje 80% ceny:

$0,8 \cdot 24 = 19,20$ zł, więc 1 kg ciastek kosztuje 19,20 zł.

Porównując ceny za 1 kg ciastek widać, że druga promocja jest korzystniejsza dla klienta.

II sposób:

W pierwszej promocji za 24 zł klient otrzyma 120% opakowania, a więc 1,2 kg ciastek. W drugiej promocji za 24 zł otrzyma 1,25 kilograma ciastek. Widać, że korzystniejsza jest druga promocja.

Odp. Druga promocja jest korzystniejsza dla klienta.

Zadanie 12.

Zapisz wyrażenie w postaci potęgi jednej liczby i oblicz jego wartość:

$$\frac{4^9 \cdot 64^3}{8^4 \cdot 32^3 \cdot 128}$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$4 = 2^2, \quad 4^9 = \left(2^2\right)^9 = 2^{18}$

$64 = 2^6, \quad 64^3 = \left(2^6\right)^3 = 2^{18}$

$8 = 2^3, \quad 8^4 = \left(2^3\right)^4 = 2^{12}$

$32 = 2^5, \quad 32^3 = \left(2^5\right)^3 = 2^{15}$

$128 = 2^7$

Zatem korzystając z powyższych przekształceń uzyskujemy:

$$\frac{4^9 \cdot 64^3}{8^4 \cdot 32^3 \cdot 128} = \frac{2^{18} \cdot 2^{18}}{2^{12} \cdot 2^{15} \cdot 2^7} = \frac{2^{36}}{2^{34}} = 2^2 = 4$$

Odp. Wartość wyrażenia wynosi 4.

Zadanie 13.

Średnia wieku w 10-osobowej grupie tanecznej była równa 18 lat. Gdy do dołączyła do nich jedna osoba, średnia wieku wzrosła do 19 lat. Ile lat ma tancerz, który dołączył?

Rozwiązanie:

Skoro średnia wieku wynosiła 18 lat, to 10 osób razem miało $10 \cdot 18 = 180$ lat. Po dołączeniu jednej osoby średnia wieku wzrosła do 19 lat, więc 11 osób ma łącznie $11 \cdot 19 = 209$ lat. Tancerz, który dołączył ma $209 - 180 = 29$ lat.

Odp. Tancerz, który dołączył do grupy ma 29 lat.

Zadanie 14.

Jacek dał Michałowi $\frac{1}{3}$ swoich pieniędzy, potem Michał dał Karolowi $\frac{1}{4}$ wszystkich pieniędzy, które miał po otrzymaniu pieniędzy od Jacka. Następnie Karol dał Jackowi $\frac{1}{10}$ wszystkich pieniędzy, które miał po otrzymaniu pieniędzy od Michała. Ostatecznie każdy miał po 90 złotych. Ile złotych miał na początku Michał?

Rozwiązanie:

Gdy Karol dał Jackowi $\frac{1}{10}$ pieniędzy, każdy miał po 90 złotych.

Przed tym krokiem, czyli po tym jak Michał dał Karolowi pieniądze, Karol miał 100 złotych (bo $\frac{1}{10}$ ze 100 zł to 10 zł), więc Jacek miał 80 złotych, a Michał musiał mieć 90 złotych.

Przed tym krokiem, czyli po tym jak Michał dał Karolowi pieniądze, Michał miał 120 złotych (bo $\frac{1}{4}$ ze 120 zł to 30 zł), Karol miał 70 złotych, a Jacek 80 złotych.

Przed pierwszym krokiem, czyli zanim Jacek dał pieniądze Michałowi, Jacek miał 120 złotych (bo $\frac{1}{3}$ ze 120 zł to 40 zł), Michał miał 80 złotych, a Karol 70 złotych.

Odp. Michał miał na początku 80 zł.

Zadanie 15.

W każdą kratkę wpisz taką cyfrę, aby ułamki były dodatnie, a równość prawdziwa. W różne kratki możesz wpisać różne cyfry. Podaj wszystkie rozwiązania.

$$\frac{\square}{9}+\frac{\square}{\square\square}=\frac{1}{5}$$

Rozwiązanie:

Pierwszy składnik tej sumy musi być mniejszy niż $\frac{1}{5}=\frac{9}{45}$.

Liczba 2 jako licznik tego składnika jest za duża, gdyż $\frac{2}{9}=\frac{10}{45}>\frac{9}{45}$. Stąd wynika, że licznik musi być równy 1.

Drugi składnik otrzymamy odejmując $\frac{1}{9}$ od $\frac{1}{5}$:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{9}{45}-\frac{5}{45}=\frac{4}{45}$$

Rozszerzając ten ułamek otrzymamy drugie rozwiązanie:

$$\frac{4}{45}=\frac{8}{90}$$

Ponieważ mianownik w tym ułamku musi być liczbą dwucyfrową, więc rozwiązań nie ma.

Odp. Zadanie ma dwa rozwiązania: $\frac{1}{9}+\frac{4}{45}=\frac{1}{5}$ oraz $\frac{1}{9}+\frac{8}{90}=\frac{1}{5}$.

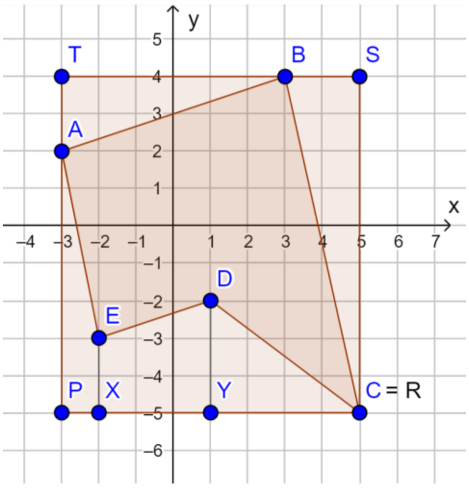
Geometria analityczna

Zadanie 1.

Dany jest pięciokąt *ABCDE* o wierzchołkach $A=(-3;2)$, $B=(3;4)$, $C=(5;-5)$, $D=(1;-2)$ i $E=(-2;-3)$. Wyznacz jego pole.

Rozwiązanie:

Narysujmy pięciokąt *ABCDE* w układzie współrzędnych.



Otoczyliśmy pięciokąt *ABCDE* możliwie najmniejszym prostokątem *PRST*. Aby wyznaczyć pole tego pięciokąta, obliczymy najpierw pole prostokąta *PRST*, a następnie odejmiemy od niego pola zewnętrznych wielokątów.

$P_{PRST}=8\cdot 9=72$

$P_{ABT}=\frac{2\cdot 6}{2}=6$

$P_{BCS}=\frac{2\cdot 9}{2}=9$

$P_{APXE}=\frac{(2+7)\cdot 1}{2}=4{,}5$

$P_{DEXY}=\frac{(2+3)\cdot 3}{2}=7{,}5$

$P_{CDY}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$

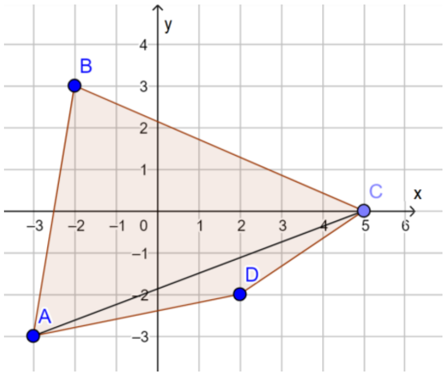
A zatem $P_{ABCDE}=72-(6+9+4{,}5+7{,}5+6)=72-33=39$.

Zadanie 2.

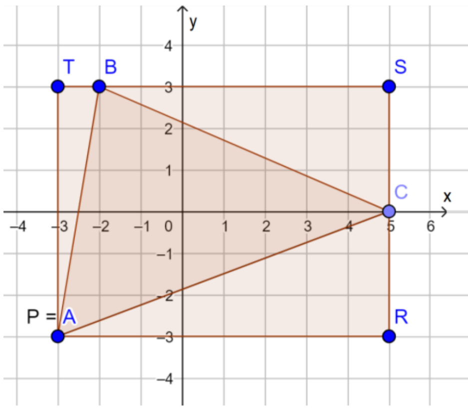
Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A=(-3;-3)$, $B=(-2;3)$, $C=(5;0)$ i $D=(2;-2)$. O ile pole trójkąta ABC jest większe od pola trójkąta ACD?

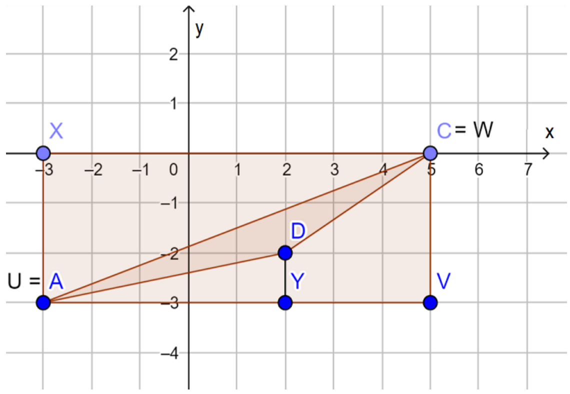
Rozwiązanie:

Sporządźmy rysunek pomocniczy:



Narysujmy w osobnych układach współrzędnych trójkąty ABC i ACD:





Pole trójkąta ABC obliczymy jako różnica pola prostokąta $PRST$ i zewnętrznych trójkątów.

$$P_{PRST}=6\cdot 8=48$$

$$P_{ABT}=\frac{1\cdot 6}{2}=3$$

$$P_{BCS}=\frac{3\cdot 7}{2}=10,5$$

$$P_{ACR}=\frac{3\cdot 8}{2}=12$$

Zatem $P_{ABC}=48-(3+10,5+12)=48-25,5=22,5$.

Pole trójkąta *ACD* wyznaczymy odejmując pole prostokąta *UVWX* od pola zewnętrznych figur:

$P_{UVWX} = 3 \cdot 8 = 24$

$P_{ACX} = \dfrac{3 \cdot 8}{2} - 12$

$P_{ADY} = \dfrac{1 \cdot 5}{2} = 2,5$

$P_{CDYV} = \dfrac{(1+3) \cdot 3}{2} = 6$

Zatem $P_{ACD} = 24 - (12 + 2,5 + 6) = 24 - 20,5 = 3,5$.

Wówczas pole trójkąta *ABC* jest większe od pola trójkąta *ACD* o $22,5 - 3,5 = 19$.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (-4; -1)$, $B = (-2; -5)$ i $C = (8; 3)$. Wyznacz pole trójkąta powstałego przez połączenie środków boków trójkąta ABC.

Rozwiązanie:

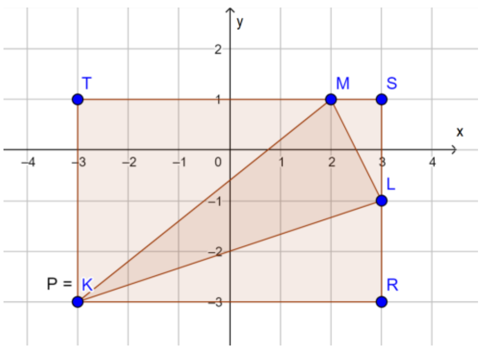
Wyznaczmy najpierw współrzędne środków boków trójkąta *ABC*:

$S_{AB} = \left(\dfrac{-4-2}{2}; \dfrac{-1-5}{2} \right) = (-3; -3) = K$

$S_{BC} = \left(\dfrac{-2+8}{2}; \dfrac{-5+3}{2} \right) = (3; -1) = L$

$S_{AC} = \left(\dfrac{-4+8}{2}; \dfrac{-1+3}{2} \right) = (2; 1) = M$

Narysujmy w układzie współrzędnych trójkąt *KLM*:



Wyznaczymy pole trójkąta *KLM* jako różnica pola prostokąta *PRST* i zewnętrznych trójkątów.

$$P_{PRST} = 6 \cdot 4 = 24$$

$$P_{KRL} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$$

$$P_{LSM} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$P_{MTP} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

A zatem $P_{KLM} = 24 - (6 + 1 + 10) = 24 - 17 = 7$.

Zadanie 4.

Dana jest łamana *ABCD*, gdzie $A = (-5;6)$, $B = (-1;-2)$, $C = (3;-4)$ i $D = (9;8)$. Połączono środki odcinków *AB*, *BC* i *CD* i oznaczono je odpowiednio punktami *K*, *L* i *M*. Połączono środki odcinków *KL* i *LM* i oznaczono je odpowiednio przez *X* i *Y*. Uzasadnij, że odcinek *XY* jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Wyznaczmy w pierwszej kolejności środki odcinków *AB*, *BC* i *CD*:

$$K = S_{AB} = \left(\frac{-5-1}{2}; \frac{6-2}{2} \right) = (-3;2)$$

$$L = S_{BC} = \left(\frac{-1+3}{2}; \frac{-2-4}{2} \right) = (1;-3)$$

$$M = S_{CD} = \left(\frac{3+9}{2}; \frac{-4+8}{2} \right) = (6;2)$$

Wyznaczmy teraz środki odcinków *KL* i *LM*:

$$X = S_{KL} = \left(\frac{-3+1}{2}; \frac{2-3}{2} \right) = \left(-1; -\frac{1}{2} \right)$$

$$Y = S_{LM} = \left(\frac{1+6}{2}; \frac{-3+2}{2} \right) = \left(3\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

Drugie współrzędne punktów *X* i *Y* są jednakowe, a zatem odcinek *XY* jest równoległy do osi *x*. Uzasadniliśmy w ten sposób, że odcinek *XY* jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych.

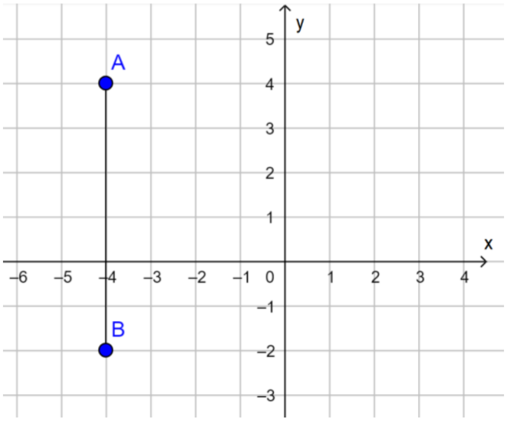
Zadanie 5.

Dane są punkty $A = (-4;4)$ i $B = (-4;-2)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu *C*, aby spełnione były jednocześnie poniższe warunki:

(1) trójkąt *ABC* nie był ostrokątny,
(2) pole trójkąta *ABC* było równe 36,
(3) druga współrzędna punktu *C* była liczbą całkowitą jednocyfrową.

Rozwiązanie:

Aby łatwiej wyobrazić sobie rozwiązanie zadania, nanieśmy punkty A i B na układ współrzędnych:



Zauważmy, że $|AB| = 6$. Obliczmy teraz długość wysokości h opuszczonej na bok AB tak, aby spełniony był warunek (2):

$$\frac{6 \cdot h}{2} = 36$$
$$3h = 36$$
$$h = 12$$

Zatem pierwsza współrzędna punktu C może wynosić $-4-12=-16$ lub $-4+12=8$. Aby trójkąt ABC nie był ostrokątny oraz spełniony był warunek (3), współrzędne punktu C mogą wynosić:

$(-16;-9)$, $(-16;-8)$, $(-16;-7)$, $(-16;-6)$, $(-16;-5)$, $(-16;-4)$, $(-16;-3)$, $(-16;-2)$, $(-16;4)$, $(-16;5)$, $(-16;6)$, $(-16;7)$, $(-16;8)$, $(-16;9)$,
$(8;-9)$, $(8;-8)$, $(8;-7)$, $(8;-6)$, $(8;-5)$, $(8;-4)$, $(8;-3)$, $(8;-2)$,
$(8;4)$, $(8;5)$, $(8;6)$, $(8;7)$, $(8;8)$, $(8;9)$.

Zadanie 6.

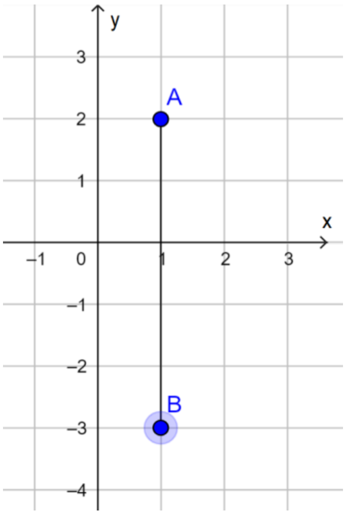
Dana jest podstawa AB trapezu $ABCD$, gdzie $A=(1;2)$ i $B=(1;-3)$. Wyznacz takie pary punktów C i D, aby spełnione były jednocześnie poniższe warunki:

(1) czworokąt $ABCD$ był trapezem położonym w I i IV ćwiartce układu współrzędnych,
(2) pole trapezu $ABCD$ było równe 6,
(3) współrzędne punktów C i D były jednocyfrowe i naturalne.

Dla jakich par punktów C i D czworokąt $ABCD$ będzie trapezem prostokątnym?

Rozwiązanie:

Aby łatwiej wyobrazić sobie rozwiązanie zadania, nanieśmy punkty A i B na układ współrzędnych:



Skoro współrzędne punktów C i D mają być liczbami naturalnymi, rozpatrzmy wyłącznie długości wysokości h trapezu wyrażone poprzez liczby naturalne. Rozpatrzmy w pierwszej kolejności $h=1$. Wówczas:

$$\frac{(5+|CD|)\cdot 1}{2}=6$$
$$5+|CD|=12$$
$$|CD|=7$$

Zatem pary punktów C i D wynoszą $(0;9)$ i $(0;2)$ lub $(0;8)$ i $(0;1)$ lub $(0;7)$ i $(0;0)$ lub $(2;9)$ i $(2;2)$ lub $(2;8)$ i $(2;1)$ lub $(2;7)$ i $(2;0)$.

Rozpatrzmy $h=2$. Wówczas:

$$\frac{(5+|CD|)\cdot 2}{2}=6$$
$$5+|CD|=6$$
$$|CD|=1$$

Zatem pary punktów C i D wynoszą $(3;9)$ i $(3;8)$ lub $(3;8)$ i $(3;7)$ lub $(3;7)$ i $(3;6)$ lub $(3;6)$ i $(3;5)$ lub $(3;5)$ i $(3;4)$ lub $(3;4)$ i $(3;3)$ lub $(3;3)$ i $(3;2)$ lub $(3;2)$ i $(3;1)$ lub $(3;1)$ i $(3;0)$.

Rozpatrzmy $h=3$. Wówczas:

$$\frac{(5+|CD|)\cdot 3}{2}=6$$
$$(5+|CD|)\cdot 3=12$$
$$5+|CD|=4$$
$$|CD|=-1<0$$

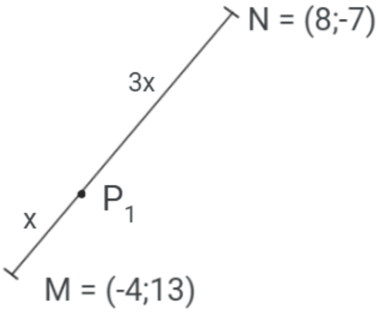
Zatem wysokość trapezu może być co najwyżej równa 2 (w zbiorze liczb naturalnych). Jedyną parą punktów *C* i *D* tak, aby czworokąt *ABCD* był trapezem prostokątnym jest para $(3;2)$ i $(3;1)$.

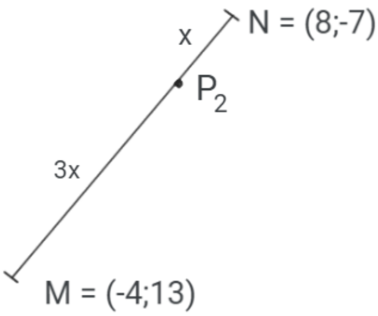
Zadanie 7.

Dany jest odcinek *MN* o końcach $M=(-4;13)$ i $N=(8;-7)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu *P* na odcinku *MN*, aby podzielił on odcinek *MN* w stosunku 1:3.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że aby odcinek *MN* był podzielony punktem *P* w stosunku 1:3, punkt ten może leżeć na odcinku *MN* na jeden z dwóch sposobów:





Wyznaczmy najpierw środek odcinka *MN*:

$$S=\left(\frac{-4+8}{2};\frac{13-7}{2}\right)=(2;3)$$

Aby punkt *P* podzielił odcinek *MN* w stosunku 1:3 powinien być on środkiem odcinka *MS* lub *NS*. Zatem:

$$P_1=\left(\frac{-4+2}{2};\frac{13+3}{2}\right)=(-1;8)$$

$$P_2=\left(\frac{8+2}{2};\frac{-7+3}{2}\right)=(5;-2)$$

Zatem punkt *P* może mieć współrzędne $(-1;8)$ lub $(5;-2)$.

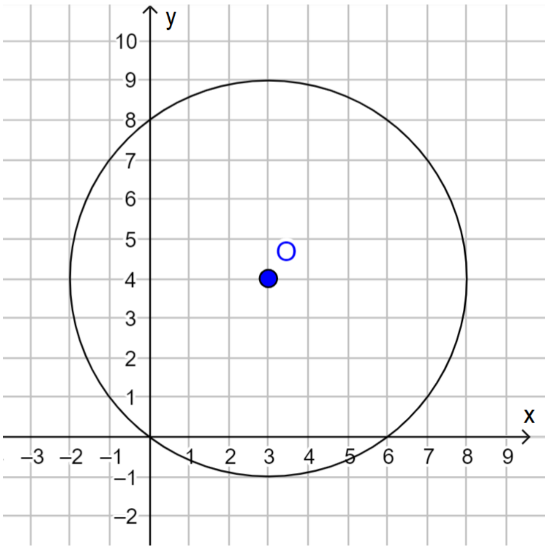
Zadanie 8.

Dany jest okrąg o środku $O=(3;4)$ i promieniu $r=5$. Ile można narysować okręgów o środku *S* spełniających jednocześnie następujące warunki:

(1) odcinek OS jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych,
(2) okręgi o środkach w punktach *O* i *S* są styczne,
(3) odległość punktu *S* od brzegu okręgu o środku *O* wynosi 2,
(4) obie współrzędne punktu *S* są nieujemne.

Rozwiązanie:

Nanieśmy okrąg o środku O na układ współrzędnych, by lepiej zobrazować sobie rozwiązanie zadania:



Z warunku (1) wiemy, że skoro odcinek OS ma być równoległy do jednej z osi układu współrzędnych, to punkt S jest postaci $S=(3;y)$ lub $S=(x;4)$. Aby spełnione były jednocześnie pozostałe warunki, punkt S może mieć następujące współrzędne:

$$S_1=(0;4),\ S_2=(6;4),\ S_3=(10;4),\ S_4=(3;1),\ S_5=(3;7),\ S_6=(3;11).$$

Zatem można narysować 6 okręgów o podanych warunkach.

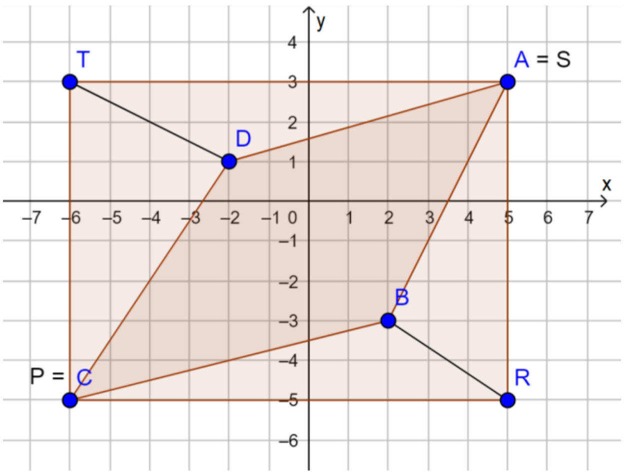
Zadanie 9.

Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A=(5;3)$, $B=(2;-3)$, $C=(-6;-5)$ i $D=(-2;1)$. Wyznacz jego pole.

Rozwiązanie:

I sposób:

Narysujmy czworokąt $ABCD$ w układzie współrzędnych i otoczmy go możliwie najmniejszym prostokątem:



Obliczymy pole czworokąta *ABCD* jako różnica pola prostokąta *PRST* oraz sumy pól trójkątów *ABR*, *BCR*, *CDT* i *ADT*.

$$P_{PRST}=11\cdot 8=88$$

$$P_{ABR}=\frac{8\cdot 3}{2}=12$$

$$P_{BCR}=P_{ADT}=\frac{11\cdot 2}{2}=11$$

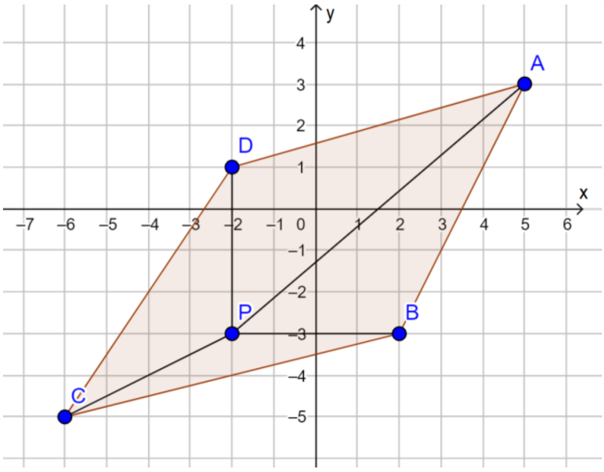
$$P_{CDT}=\frac{8\cdot 4}{2}=16$$

Zatem pole czworokąta *ABCD* możemy obliczyć następująco:

$$P_{ABCD}=P_{PRST}-\left(P_{ABR}+P_{BCR}+P_{CDT}+P_{ADT}\right)$$
$$P_{ABCD}=88-(12+11+16+11)=88-50=38$$

II sposób:

Narysujmy czworokąt *ABCD* w układzie współrzędnych:



Wyznaczyliśmy punkt $P=(-2;-3)$ i narysowaliśmy odcinki *AP*, *BP*, *CP* i *DP*. Podzieliliśmy w ten sposób czworokąt *ABCD* na cztery trójkąty. Obliczmy pola tych trójkątów:

$$P_{ABP}=\frac{4\cdot 6}{2}=12$$

$$P_{BCP}=\frac{4\cdot 2}{2}=4$$

$$P_{CDP}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$$

$$P_{ADP}=\frac{4\cdot 7}{2}=14$$

Pole czworokąta *ABCD* jest sumą pól wyznaczonych trójkątów. Stąd mamy:

$$P_{ABCD}=12+4+8+14=38.$$

Zadanie 10.

Dane są punkty $(-3;1)$, $(1;4)$ i $(6;2)$. Wyznacz współrzędne czwartego punktu tak, aby wraz z pozostałymi punktami otrzymać równoległobok.

Rozwiązanie:

I przypadek:

Oznaczmy punkty $A=(-3;1)$, $B=(1;4)$ i $C=(6;2)$. Znajdźmy punkt D tak, aby czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem. Zauważmy, że punkt C względem B położony jest o 5 kratek w prawo i o 2 kratki w dół. Zatem punkt D jest położony analogicznie względem A. Stąd $D=(-3+5;1-2)$, czyli $D=(2;-1)$.

II przypadek:

Oznaczmy punkty $A=(1;4)$, $B=(-3;1)$ i $C=(6;2)$. Znajdźmy punkt D tak, aby czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem. Zauważmy, że punkt C względem B położony jest o 9 kratek w prawo i o 1 kratkę w górę. Zatem punkt D jest położony analogicznie względem A. Stąd $D=(1+9;4+1)$, czyli $D=(10;5)$.

III przypadek:

Oznaczmy punkty $A=(-3;1)$, $B=(6;2)$ i $C=(1;4)$. Znajdźmy punkt D tak, aby czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem. Zauważmy, że punkt C względem B położony jest o 5 kratek w lewo i o 2 kratki w górę. Zatem punkt D jest położony analogicznie względem A. Stąd $D=(-3-5;1+2)$, czyli $D=(-8;3)$.

Szukany punkt ma współrzędne $(2;-1)$, $(10;5)$ lub $(-8;3)$.

Zadanie 11.

Łukasz zaznaczył w układzie współrzędnych punkty $A_1=(-12;8)$ i $A_2=(-5;3)$. Następnie wyznaczył punkt A_3 tak, aby punkt A_2 był środkiem odcinka A_1A_3. Następnie wyznaczył punkt A_4 tak, aby punkt A_3 był środkiem odcinka A_1A_4. W podobny sposób Łukasz zaznaczał kolejne punkty, tj. wyznaczył punkt A_5 tak, aby punkt A_4 był środkiem odcinka A_1A_5. Wyznacz współrzędne punktu A_6.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $A_1=(x_1,y_1)$, $A_2=(x_2,y_2)$, $A_3=(x_3,y_3)$ itd.
Postępujmy tak, by naśladować kolejne kroki Łukasza.

Krok I:

$$(-5;3)=\left(\frac{-12+x_3}{2};\frac{8+y_3}{2}\right)$$

$$\frac{-12+x_3}{2}=-5 \qquad \frac{8+y_3}{2}=3$$
$$-12+x_3=-10 \qquad 8+y_3=6$$
$$x_3=2 \qquad y_3=-2$$

Zatem $A_3=(2;-2)$.

Krok II:

$$(2;-2)=\left(\frac{-12+x_4}{2};\frac{8+y_4}{2}\right)$$

$$\frac{-12+x_4}{2}=2 \qquad \frac{8+y_4}{2}=-2$$
$$-12+x_4=4 \qquad 8+y_4=-4$$
$$x_4=16 \qquad y_4=-12$$

Zatem $A_4=(16;-12)$.

Krok III:

$$(16;-12)=\left(\frac{-12+x_5}{2};\frac{8+y_5}{2}\right)$$

$$\frac{-12+x_5}{2}=16 \qquad \frac{8+y_5}{2}=-12$$
$$-12+x_5=32 \qquad 8+y_5=-24$$
$$x_5=44 \qquad y_5=-32$$

Zatem $A_5=(44;-32)$.

Krok IV:

$$(44;-32)=\left(\frac{-12+x_6}{2};\frac{8+y_6}{2}\right)$$

$$\frac{-12+x_6}{2}=44 \qquad \frac{8+y_6}{2}=-32$$
$$-12+x_6=88 \qquad 8+y_6=-64$$
$$x_6=100 \qquad y_6=-72$$

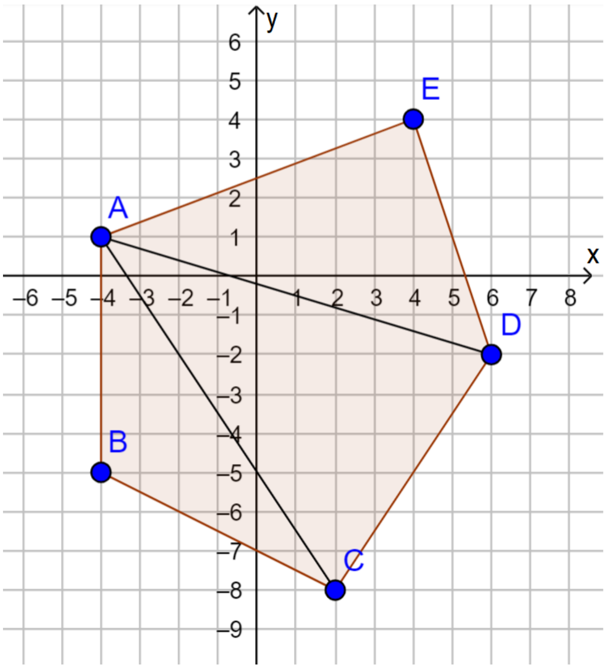
Zatem $A_6=(100;-72)$.

Zadanie 12.

W pięciokącie *ABCDE* o wierzchołkach $A=(-4;1)$, $B=(-4;-5)$, $C=(2;-8)$, $D=(6;-2)$ i $E=(4;4)$ poprowadzono wszystkie przekątne wychodzące z wierzchołka *A*. Jakim procentem pola pięciokąta *ABCDE* jest pole każdego z otrzymanych trójkątów. Wynik podaj w przybliżeniu do części setnych.

Rozwiązanie:

Narysujmy pięciokąt *ABCDE* w układzie współrzędnych oraz zaznaczmy przekątne wychodzące z wierzchołka *A*:



Wyznaczymy teraz pola trójkątów *ABC*, *ADE* oraz *ACD*. Pola trójkątów *ADE* oraz *ACD* zostaną wyznaczone poprzez różnicę pomiędzy polem możliwie najmniejszego prostokąta, który otacza każdy z trójkątów a pozostałymi trzema trójkątami, które w układzie nie rysujemy a jedynie sobie wyobrażamy.

$$P_{ABC}=\frac{6\cdot 6}{2}=18$$

$$P_{ADE}=10\cdot 6-\left(\frac{10\cdot 3}{2}+\frac{6\cdot 2}{2}+\frac{8\cdot 3}{2}\right)=60-(15+6+12)=27$$

$$P_{ACD}=9\cdot 10-\left(\frac{6\cdot 4}{2}+\frac{9\cdot 6}{2}+\frac{10\cdot 3}{2}\right)=90-(12+27+15)=36$$

Pole pięciokąta *ABCDE* jest sumą pól wyznaczonych trójkątów. Zatem:

$$P_{ABCDE}=18+27+36=81$$

Wyznaczmy teraz jakim procentem pola pięciokąta *ABCDE* jest pole każdego z otrzymanych trójkątów:

$$\frac{18}{81}=\frac{2}{9}=0,(2)\approx 22,22\%$$
$$\frac{27}{81}=\frac{3}{9}=0,(3)\approx 33,33\%$$
$$\frac{36}{81}=\frac{4}{9}=0,(4)\approx 44,44\%$$

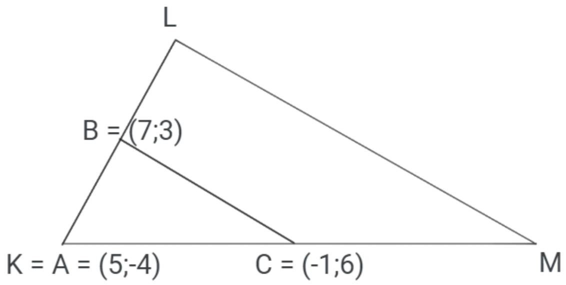
Pole trójkąta *ABC* stanowi 22,22% pola pięciokąta *ABCDE*, pole trójkąta *ADE* – 33,33%, a pole trójkąta *ACD* – 44,44%.

Zadanie 13.

Antonina narysowała w układzie współrzędnych trójkąt ABC o wierzchołkach $A=(5;-4)$, $B=(7;3)$ i $C=(-1;6)$, po czym narysowała trójkąt KLM w skali 2:1. Wyznacz współrzędne punktów *K*, *L* i *M*, jeżeli boki *AB* oraz *AC* trójkąta *ABC* zawierały się odpowiednio w bokach *KL* oraz *KM* trójkąta *KLM*.

Rozwiązanie:

Stwórzmy rysunek pomocniczy:



Skoro boki *AB* oraz *AC* trójkąta *ABC* zawierają się odpowiednio w bokach *KL* oraz *KM* trójkąta *KLM*, to $K = A=(5;-4)$.

Antonina narysowała trójkąt *KLM* w skali 2:1 względem trójkąta *ABC*. Zatem punkt *B* jest środkiem odcinka *KL*, a punkt *C* jest środkiem odcinka *KM*. Wyznaczmy teraz współrzędne punktów *L* i *M*:

$$(7;3)=\left(\frac{5+x_L}{2};\frac{-4+y_L}{2}\right)$$

$$\frac{5+x_L}{2}=7 \qquad \frac{-4+y_L}{2}=3$$
$$5+x_L=14 \qquad -4+y_L=6$$
$$x_L=9 \qquad y_L=10$$

$$\left(-1;6\right)=\left(\frac{5+x_M}{2};\frac{-4+y_M}{2}\right)$$

$$\frac{5+x_M}{2}=-1 \qquad\qquad \frac{-4+y_M}{2}=6$$

$$5+x_M=-2 \qquad\qquad -4+y_M=12$$

$$x_M=-7 \qquad\qquad y_M=16$$

Współrzędne szukanych punktów *K*, *L* i *M* wynoszą odpowiednio $\left(5;-4\right)$, $\left(9;10\right)$ i $\left(-7;16\right)$.

Zadanie 14.

W układzie współrzędnych narysowano odcinek AB o końcach $A=\left(-4;-3\right)$ i $B=\left(-2;1\right)$. Wyznacz możliwe pary współrzędnych punktów *P* i *R* odcinka PR wiedząc, że spełnione są jednocześnie następujące warunki:

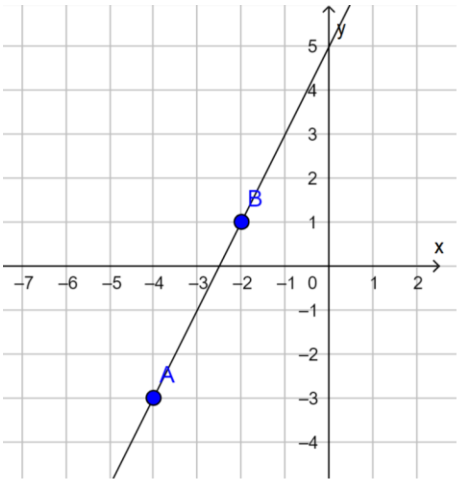
(1) $\frac{|PR|}{|AB|}=3$,

(2) $PR \parallel AB$,

(3) jeden z końców odcinka AB jest jednym z końców odcinka *PR*.

Rozwiązanie:

Aby łatwiej wyobrazić sobie rozwiązanie zadania, nanieśmy punkty *A* i *B* na układ współrzędnych:



Jeśli spełniony ma być warunek (2) i (3), to odcinki *AB* i *PR* leżą na wspólnej prostej. Z warunku (1) wiemy, że odcinek *PR* jest 3 razy dłuższy od odcinka *AB*. Zauważmy, że punkt *B* względem punktu *A* przesunięty jest o 2 kratki w prawo i o 4 kratki w górę.

Ustalmy, że $B=P$. Wówczas:

$R=\left(-2+2\cdot3;1+4\cdot3\right)=\left(4;13\right)$ lub $R=\left(-2-2\cdot3;1-4\cdot3\right)=\left(-8;-11\right)$.

Ustalmy teraz, że $A=P$. Wówczas:

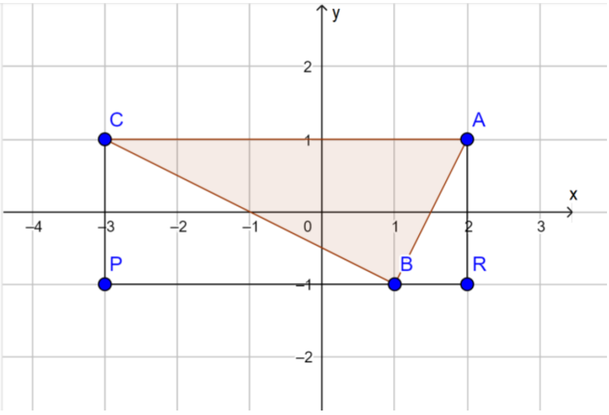
$R=\left(-4+2\cdot3;-3+4\cdot3\right)=\left(2;9\right)$ lub $R=\left(-4-2\cdot3;-3-4\cdot3\right)=\left(-10,-15\right)$

Zadanie 15.

Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A=(2;1)$, $B=(1;-1)$ i $C=(-3;1)$. Wyznacz jego obwód.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt *ABC* w układzie współrzędnych:



Zauważmy, że $|AC|=5$. Aby wyznaczyć długości odcinków *AB* oraz *BC* zastosujemy dwukrotnie twierdzenie Pitagorasa. Z trójkąta *BCP* mamy:

$$|CP|^2+|BP|^2=|BC|^2$$
$$2^2+4^2=|BC|^2$$
$$|BC|^2=4+16$$
$$|BC|^2=20$$
$$|BC|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Z trójkąta *ABR* mamy:

$$|AR|^2+|BR|^2=|AB|^2$$
$$2^2+1^2=|AB|^2$$
$$|AB|^2=4+1$$
$$|AB|^2=5$$
$$|AB|=\sqrt{5}$$

Zatem obwód trójkąta *ABC* wynosi $2\sqrt{5}+\sqrt{5}+5=3\sqrt{5}+5$.